Marcelo Gomes

Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Florianópolis - SC, Brasil

2013

Marcelo Gomes

Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Trabalho de conclusão de curso apresentado para obtenção do Grau de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador:
Melissa Weber Mendonça

Universidade federal de Santa Catarina
Centro de ciências Físicas e Matemáticas

Florianópolis - SC, Brasil

2013

Trabalho de conclusão de Graduação em Matemática sob o título *"Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias"*, defendida por Marcelo Gomes e aprovada em 2013, em Florianópolis, Estado de Santa Catarina, pela banca examinadora designada pela Portaria número 06/CCM/13.

Prof. Nereu Estanislau Burin -
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Dra. Melissa Weber Mendonça -
Orientadora

Prof. Dra. Silvia Martini de Holanda
Janesch - UFSC

Prof. Dra. Flávia Tereza Giordani - UFSC

Luciane e Altair.

Agradecimentos

À Deus acima de tudo.

A Luciane Carlota Faria e Altair Antônio Volpato ao apoio, incentivo e compreensão nos momentos que precisei estudar e não pude dar a devida atenção que mereciam.

Aos colegas que participaram desta trajetória, em especial à Juliana Tabalipa, Carlos Fabiano Rosa e Ivo Paulek Junior.

A minha orientadora, Melissa Weber Mendonça, agradeço pelos ensinamentos, por toda paciência e dedicação.

As Professoras, Silvia Martini de Holanda Janesch e Flávia Tereza Giordani, por aceitarem compor a banca, dedicarem seu tempo para a leitura e contribuírem para o aperfeiçoamento do trabalho.

Também agradeço a todos os outros professores e servidores que me auxiliaram nesta graduação.

Resumo

Inicialmente definimos algumas propriedades de matrizes úteis em nosso estudo e ainda algumas definições como por exemplo números complexos, vetores e determinantes. Além disso, apresentamos o objetivo central em nosso estudo que são os sistemas de equações diferenciais ordinárias. Por seguinte, estudamos métodos de resoluções dos sistemas de equações diferenciais ordinárias envolvendo autovalores e autovetores.

Finalmente apresentamos problemas das áreas de física, química e engenharia, onde foi utilizado os métodos estudos no trabalho de conclusão de curso para resolução dos sistemas de equações diferenciais ordinária associado as respectivas áreas.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Este trabalho tem como objetivo discorrer sobre Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias, como também sua aplicação nas mais diversas áreas. Tais aplicações ou modelos como são chamado na Física, Química, Economia, Engenharia entre outras áreas.

O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, uma revisão da Álgebra Linear, que nos auxiliará nos demais capítulos. Nesse capítulo, são apresentados a definição de matrizes, tipos de matrizes, inversa de uma matriz, vetores e função matricial, como também Sistemas Lineares de Equações Algébricas, Combinação Linear entre vetores e Autovalores e Autovetores.

No segundo capítulo, é falado sobre Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem Homogêneo, Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem não Homogêneo e o método de Diagonalização e o método da Variação dos Parâmetros.

Já no terceiro e último capítulo, são feitos alguns problemas de aplicação do capítulo anterior. Sendo elas uma com aplicação na Química, outra na Engenharia e por último um modelo na Física.

1 Matrizes

"Mas há uma outra razão que explica a elevada reputação das Matemáticas, é que elas levam às ciências naturais exatas, uma certa proporção de segurança que, sem elas, essas ciências não poderiam obter."

Albert Einstein

1.1 Definição de Matriz

Nesta seção serão apresentadas noções básicas de matrizes. Este conceito se apresenta nos mais diversos problemas onde a utilização de matrizes contribui para simplificação das resoluções e ainda contribui para novas formas de resoluções.

Chamemos de matriz uma tabela de elementos dispostos de m linhas e n colunas.

Por exemplo, recolhemos dados referentes à quantidade de jogos, vitórias, empates e derrotas do campeonato brasileiro de 2011 de futebol que está disposto na tabela:

	Jogos	Vitórias	Empates	Derrotas
Flamengo	38	15	16	7
Vasco	38	19	12	7
Palmeiras	38	11	17	10

Tabela 1: Brasileirão 2011

Agora transformando a tabela em uma matriz de 3 linhas e 4 colunas temos

$$\begin{pmatrix} 38 & 15 & 16 & 7 \\ 38 & 19 & 12 & 7 \\ 38 & 11 & 17 & 10 \end{pmatrix}$$

Observe que para um problema com muitos dados, escrever a tabela em forma de matriz se torna muito conveniente.

Denotamos matrizes por letras maiúsculas A, B, C, ... Serão usadas também letras gregas maiúsculas $\Phi, \Psi, ...$

Definição 1. *Uma matriz A de ordem m por n consiste em um arranjo de elementos (números reais ou complexos, polinômios, funções, matrizes, etc...) dispostos em m linhas e n colunas, ou seja,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

A matriz A pode ser representada de forma simplificada por (a_{ij}), onde os elementos da matriz da i-ésima linha e j-ésima coluna são dados por a_{ij}, para todo $i \in \{1, 2, 3, ...m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, ...n\}$.

Note que não é necessário que a matriz A contenha o mesmo número de linhas e de colunas e isso fica ainda mais evidente nos problemas práticos.

1.2 Tipos de Matrizes

Seja A uma matriz com m linhas e n colunas.

Matriz Quadrada

Definição 2. *Toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas, chamamos de* ***matriz quadrada****, ou seja, $m = n$.*

Exemplo 1. *Este é um exemplo de matriz quadrada de ordem 3×3.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz Nula

Definição 3. *Denomina-se matriz nula a matriz cujos elementos são todos iguais a zero, e é, $a_{ij} = 0$, para todo $i \in \{1, 2, 3, ...m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, ...n\}$*

Exemplo 1. *Exemplo de uma matriz nula de ordem 2×2.*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Linha

Definição 4. *Matriz linha é toda matriz que possui somente uma linha.*

Exemplo 1. *Matriz linha de ordem 1×3*

$$L = \begin{pmatrix} 34 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Matriz Coluna

Definição 5. *Matriz coluna é toda matriz que possui apenas uma coluna e o número de linhas é independente.*

Exemplo 1. *Matriz coluna de ordem* 4×1

$$C = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 23 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidade

Definição 6. *Numa matriz quadrada de ordem n, os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam a diagonal principal, ou seja, são os elementos a_{ij} tal que $i = j$. A outra diagonal da matriz denomina-se secundária, ou seja, são os elementos a_{ij} tal que $i + j = n + 1$.*

Definição 7. *Denomina-se matriz identidade toda matriz quadrada de ordem n cujos elementos da diagonal principal são iguais a um e os demais elementos são iguais a zero, ou seja, $a_{ij} = 1$, para todo $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, onde $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots n\}$.*

Exemplo 1. *Matriz identidade de ordem* 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da **Matriz Identidade** deriva uma propriedade importante.

$$AI = IA = A$$

1.3 Operações com Matrizes

Soma de Matrizes

Veja o exemplo abaixo:

Em uma editora, a venda de livros de Matemática, Física e Química nos meses de Janeiro, Fevereiro e Março de 2010 e 2011 podem ser expressas nas tabelas 2 e 3, respectivamente.

	Janeiro	Fevereiro	Março
Matemática	20000	32000	45000
Física	15000	18000	25000
Química	16000	17000	23000

Tabela 2: Venda de Livros em 2010

	Janeiro	Fevereiro	Março
Matemática	16000	12000	35000
Física	19000	11000	30000
Química	21000	15000	26000

Tabela 3: Venda de Livros em 2011

Uma pergunta natural é quantos livros a editora vendeu no primeiro trimestre dos anos de 2010 e 2011. Para responder esta pergunta usaremos o auxílio de matrizes. Então primeiramente transformamos as tabelas em matrizes, chamaremos de matriz A a matriz relacionada à Tabela 2 e de B a matriz relacionada à Tabela 3.

$$A = \begin{pmatrix} 20000 & 32000 & 45000 \\ 15000 & 18000 & 25000 \\ 16000 & 17000 & 23000 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 16000 & 12000 & 35000 \\ 19000 & 11000 & 30000 \\ 21000 & 15000 & 26000 \end{pmatrix}$$

É natural pensar que a soma de matrizes é dada da seguinte forma

$$A + B = \begin{pmatrix} 20000 & 32000 & 45000 \\ 15000 & 18000 & 25000 \\ 16000 & 17000 & 23000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16000 & 12000 & 35000 \\ 19000 & 11000 & 30000 \\ 21000 & 15000 & 26000 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 20000 + 16000 & 32000 + 12000 & 45000 + 35000 \\ 15000 + 19000 & 18000 + 11000 & 25000 + 30000 \\ 16000 + 21000 & 17000 + 15000 & 23000 + 26000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36000 & 44000 & 80000 \\ 34000 & 29000 & 29000 \\ 37000 & 32000 & 49000 \end{pmatrix}$$

Definição 8. *A soma de duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de ordem m por n é a matriz $C = c_{ij}$ tal que:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemplo 1. *Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ matrizes de ordem 2 por 2. Somando as matrizes A e B, temos:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3-2 \\ 3-3 & -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Obs: A diferença $A - B$ de duas matrizes de ordem m por n é uma matriz C tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Exemplo 1. *Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Subtraindo $A - B$ temos:*

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 2-(-2) \\ 5-5 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matriz por escalar

Definição 9. *O produto de uma matriz A por um escalar α (real ou complexo), denotado por αA é a matriz obtida multiplicando cada elemento de A por α, e é,*

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Multiplicação de Matrizes

Definição 10. *O produto de duas matrizes está definido da seguinte forma. Sejam A e B matrizes de ordem $m \times r$ e $r \times n$, respectivamente. Então $AB = C$, onde C é uma matriz $m \times n$ e cada elemento c_{ij} é dado por*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Obs: A multiplicação de matrizes não é comutativa, pois existem matrizes A e B tais que $AB \neq BA$.

Exemplo 1. *Dadas as matrizes* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ *, calcule o produto das matrizes* A *e* B*.*

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3+2.6 & 3.1+2.2 \\ 5.3+0.6 & 5.1+0.2 \\ 1.3+4.6 & 1.1+4.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 15 & 5 \\ 27 & 9 \end{pmatrix}$$

1.4 Matriz Transposta

Definição 11. *Seja* A *uma matriz de ordem* $m \times n$*. Encontra-se a matriz transposta de* A *permutando os elementos das linhas e colunas. Isto é, se* $A = (a_{ij})$ *então* $A^T = (a_{ji})$ *de ordem* $n \times m$*.*

Exemplo 1. *Seja* A *a matriz tal que* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *, então a matriz transposta de* A *é dada por* $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Obs: Neste trabalho vamos supor já conhecido os números complexos.

Matriz Hermitiana

Definição 12. *Definimos* $M_{m\times n}(\mathbb{C})$*, sendo o espaço de matrizes de ordem* $m \times n$ *com elementos complexos. Se* $m = n$ *dizemos que* $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *é o espaço de matrizes quadradas de ordem* n *com entradas complexas e denotamos por* $M_n(\mathbb{C})$*.*

Definição 13. *Dada* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *uma matriz, sua transposta conjugada, a qual denotamos por* $\bar{A}^T = A^H$*, é definida como*

$$\bar{a}_{ij}^T = \bar{a}_{ji}.$$

Definição 14. *Dada* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *uma matriz , A é dita Hermitiana se* $A = A^H$*.*

Exemplo 1. *Seja* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$ *temos* $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$

e $\bar{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$

Como $A = \bar{A}^T$, então a matriz A é Hermitiana.

1.4.1 Vetores

Definição 1. *Vetor é um representante de uma classe de equipolência de segmentos de reta orientados, que possuem todos o mesma módulo, mesma direção e mesmo sentido.*

Definição 2. *Definimos o produto interno usual entre os vetores x e y do mesmo espaço vetorial V, como sendo*

$$\langle x, y \rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

Considere o produto interno de x por x.

$$\langle x, x \rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i$$

Para maiores estudos sobre espaço vetorial segue a referência [3].

Note que o produto interno de x por x será um número real.

Chama-se o número real $(\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$ de módulo de x, denotado por $|x|$ que é o comprimento ou tamanho do vetor x. Se $\langle x, y \rangle = 0$ dizemos que x e y formam um ângulo de 90 graus, ou seja, são ortogonais.

1.4.2 Determinantes

Vamos supor já conhecido a definição de determinante.

Definição 1. *Seja matriz quadrada de ordem 1, indicada por $A = (a_{11})$. Definimos o determinantes da matriz A, sendo $\det A = a_{11}$.*

Definição 2. *Seja A a matriz de ordem 2. Definimos o determinante sendo o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.*

Definição 3. *Seja $A = (a_{ij})$ a matriz de ordem $n \times n$. O ij-ésimo menor de A é o determinante da submatriz M_{ij} de ordem $(n-1) \times (n-1)$ obtida quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A. O ij-ésimo cofator C_{ij} de A é definido como*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$

Propriedade 1. *O determinante de uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é definido como*

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Seguem duas propriedades de determinantes úteis em nosso estudo.

Sejam A e B matrizes.

$i.$ $\det(AB) = \det(A).\det(B)$

$ii.$ $\det A^T = \det A$

1.4.3 Inversa

Uma matriz quadrada A é dita **não-singular** ou **invertível** se existe uma outra matriz B de mesma ordem tal que $AB = BA = I$ e denota-se por $B = A^{-1}$. Caso contrário diz-se que A é uma matriz **singular** ou **não-invertível**.

Existem várias maneiras de se encontrar a inversa A^{-1} de uma matriz A. Supondo que a matriz A possui inversa, um método que envolve o uso de determinantes é associar a cada elemento a_{ij} com o determinante da matriz M_{ij} que é obtida através da eliminação da linha e da coluna onde a_{ij} se encontra. Além disso, associa-se cada elemento a_{ij} com o cofator C_{ij} definido pelo produto do $\det(M_{ij})$ com $(-1)^{i+j}$.

Se $B = A^{-1}$, então podemos definir

$$b_{ij} = \frac{C_{ij}}{\det A}$$

Teorema 1. *O conjunto de vetores $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ de um espaço vetorial V é linearmente independente se, somente se, $\det X \neq 0$, onde X é a matriz cujas linhas ou colunas são os vetores $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$.*

Referência [2]

Teorema 2. *Seja A uma matriz de ordem n é dita não-singular se, somente se,* $\det A \neq 0$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam A, K matrizes de ordem n. Sabemos $\det(AK) = \det(A).\det(K)$, como A possui inversa A^{-1}, então $(A.A^{-1}) = I_n$. Daí $\det(A.A^{-1}) = \det(A).\det(A^{-1}) = 1$.

Portanto, $\det A \neq 0$.

($\Leftarrow$) Para mostrar que a matriz A é não-singular devemos encontrar uma matriz M tal que $A.M = I_n$. Então as colunas da matriz M são soluções do sistemas de equações $A.M = I_n$. Como $\det A \neq 0$ temos pelo teorema anterior que as colunas de A são linearmente independentes e assim podemos concluir que o sistema possui uma única solução.

Num argumento análogo, tem-se um sistema com a matriz M^T e note que $\det M^T = \det M$, onde as soluções do sistema $A.M^T = I_n$ são linhas de uma matriz K tal que $KA = I_n$. Mas $K = KI_n = K(AM) = (KA)M = I_nM = M$.

Logo, $AM = MA = I_n$, ou seja, $M = A^{-1}$ e a matriz A possui inversa. $\square$

Outra forma mais eficiente de calcular a inversa é através de **redução por linhas** ou **método de eliminação de gauss**.

Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1. *Seja* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *uma matriz invertível. Transformando a matriz* A *em uma matriz aumentada* $A|I$.

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Feito a transformação para matriz aumentada $A|I$*, o objetivo através de operações elementares com linhas é transformar o lado esquerdo (referente à matriz original) em uma matriz identidade.*

Se multiplicarmos por 2 a primeira linha e subtrair da segunda linha, obtemos a segunda linha.

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somando a segunda linha com a terceira linha, obtemos a terceira linha

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se multiplicarmos a segunda linha por (-1), temos

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, a parte da direita é a matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Funções Matriciais

Sejam $a_{11}(t), \ldots, a_{mn}(t)$ funções definidas tais que $a_{mn} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Definimos funções vetoriais e matriciais da seguinte forma:

Seja $X : \mathbb{R} \to M_{m\times 1}(\mathbb{C})$, tal que

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}$$

Seja $A : \mathbb{R} \to M_{m\times n}(\mathbb{C})$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & \ldots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

A matriz $A(t)$ é dita contínua em $t = t_0$ no intervalo $\alpha < t < \beta$, se suas entradas são funções contínuas em $t = t_0$. $A(t)$ é dita diferenciável em $\alpha < t < \beta$ se seus elementos são diferenciáveis e sua derivada é dada por

$$A'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{da_{11}}{dt} & \dfrac{da_{12}}{dt} & \ldots & \dfrac{da_{1n}}{dt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{da_{m1}}{dt} & \dfrac{da_{m2}}{dt} & \ldots & \dfrac{da_{mn}}{dt} \end{pmatrix}$$

De forma muito parecida encontramos a integral $A(t)$ assim definida

$$\int_a^b A(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b a_{11}(t)dt & \int_a^b a_{12}(t)dt & \dots & \int_a^b a_{1n}(t)dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b a_{m1}(t)dt & \int_a^b a_{m2}(t)dt & \dots & \int_a^b a_{mn}(t)dt \end{pmatrix}$$

Exemplo 1. *Seja* $A(t) = \begin{pmatrix} sen(t) & t \\ 1 & \cos(t) \end{pmatrix}$, *então*

$$A'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 \\ 0 & -sen(t) \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\pi A(t)dt = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\pi^2}{2} \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

As propriedades das derivadas das funções continuas de uma variável são válidas nestes casos:

i. $\dfrac{d}{dt}(cA) = c\dfrac{dA}{dt}$

ii. $\dfrac{d(A+B)}{dt} = \dfrac{dA}{dt} + \dfrac{dB}{dt}$

iii. $\dfrac{d(AB)}{dt} = \dfrac{dA}{dt}B + \dfrac{dB}{dt}A$

1.6 Sistemas de Equações Lineares, Combinação Linear, Autovalores e Autovetores

1.6.1 Sistemas de Equações Lineares

Um conjunto de m equações lineares com n variáveis é um conjunto de equações do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

que pode ser reduzido na forma matricial

$$Ax = b \tag{1.2}$$

onde,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ e } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Se $b = 0$, chamamos de sistema homogêneo e escrevemos $Ax = 0$, caso contrário chamamos de sistema não homogêneo.

Se uma matriz A de ordem $n \times n$ é invertível, se o $\det A \neq 0$ e existe A^{-1} que é a inversa de A. Da Eq.(1.2), temos

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

Isto significa que se $\det A \neq 0$ o sistema (1.1) terá uma única solução. Em particular, para o problema de sistema homogêneo $Ax = 0$, se tivermos o $\det A \neq 0$, então teremos como solução apenas a solução trivial $x = 0$. Caso tenhamos $\det A = 0$ temos que A^{-1} não existe e assim a equação $x = A^{-1}b$ não é válida. Para o sistema não homogêneo possuir solução deve-se satisfazer a condição que o vetor b seja ortogonal a y, ou seja,

$$\langle b, y \rangle = 0 \tag{1.3}$$

para todo vetor y tal que $A^H y = 0$, onde A^H é Hermitiana da matriz A. Se a condição da Eq.(1.3) for satisfeita a equação Eq.(1.2) terá uma infinidade de soluções e cada uma é de forma

$$x = x^{(0)} + \xi \tag{1.4}$$

onde, $x^{(0)}$ é uma solução particular e ξ é solução geral de equação homogênea.

Uma maneira de resolver o sistema de equações lineares é usar o auxílio de matriz aumentada.

$$A|I = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & | & b_n \end{pmatrix}$$

O objetivo é através das operações elementares sobre linha transformar o lado esquerdo em uma matriz triangular superior. Feito isso será fácil verificar se a equação terá ou não solução.

Exemplo 1. *Considere o sistema,*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases} \tag{1.5}$$

Transformando o sistema em matriz aumentada.

$$A|I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 8 \\ 4 & 2 & 2 & | & 4 \\ 2 & 5 & 3 & | & -12 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ a primeira linha,

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & 4 \\ 4 & 2 & 2 & | & 4 \\ 2 & 5 & 3 & | & -12 \end{pmatrix}$$

Teremos a linha 2 somando a linha 2 com quatro vezes o oposto da linha 1.

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & 4 \\ 0 & 0 & -4 & | & -12 \\ 2 & 5 & 3 & | & -12 \end{pmatrix}$$

Obtemos a linha 3 somando a linha 3 com duas vezes o oposto da linha 1.

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & 4 \\ 0 & 0 & -4 & | & -12 \\ 0 & 4 & 0 & | & -20 \end{pmatrix}$$

Trocando a posição da linha 2 com a linha 3.

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & 4 \\ 0 & 4 & 0 & | & -20 \\ 0 & 0 & -4 & | & -12 \end{pmatrix}$$

Dividindo a linha 2 por 4.

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & -4 & | & -12 \end{pmatrix}$$

Dividindo a linha 3 pelo oposto do número 4.

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Obtemos a linha 1 somando a linha 1 com o oposto do produto da linha 2 com $\frac{1}{2}$.

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & | & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente multiplicamos a linha 1 por 2 .

$$A|I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & | & 13 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Assim, o sistema original se tornou um sistema equivalente,

$$\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 13 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = -5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 3 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Substituindo x_2 e x_3 na primeira equação do sistema, obtemos $x_1 = 4$.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

que é solução do sistema (1.5).

Como o sistema possui uma única solução, a matriz dos coeficientes é invertível.

Exemplo 2. *Seja o sistema*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = b_2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = b_3 \end{cases}$$

Transformando a equação em matriz aumentada

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & b_1 \\ -1 & 1 & -2 & | & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & | & b_3 \end{pmatrix}$$

Operando as linhas da mesma forma que o Exemplo 1, teremos:

$$A|I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & b_1 + 3b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

Para que o sistema possua solução devemos ter a seguinte condição sendo satisfeita.

$$\langle (b_1, b_2, b_3), (1, 3, 1) \rangle = 0 \tag{1.6}$$

Note que este caso é uma exemplo da condição Eq.(1.3)*. Vamos supor sem perda de generalidade que $b_1 = 2, b_2 = 1$ e $b_3 = -5$ para que a Eq.*(1.6) *seja satisfeita. Assim obtemos o seguinte associado ao sistema original.*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

Para resolver o sistema escolhemos a variável x_3 como uma incógnita.

$$x_2 = x_3 - 3$$

$$x_1 = 2 + 2x_2 - 3x_3 = 2 + 2(x_3 - 3) - 3x_3 = 2 + 2x_3 - 6 - 3x_3 = x_3 - 4$$

Escrevendo em notação matricial

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + 4 \\ x_3 - 3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Note que a segunda parcela é a solução particular da equação não homogênea e a primeira parcela é solução geral da equação homogênea.

Exercício encontrado em [2].

1.6.2 Dependência e Independência linear

Definição 1. *Seja $V = \mathbb{R}^m$ ou $V = \mathbb{C}^m$ um espaço vetorial, $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ vetores e $c_1, ..., c_n$ escalares. Qualquer vetor $v \in V$ tal que*

$$v = c_1 x^{(1)} + ... + c_n x^{(n)}$$

chamamos de combinação linear de $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$

Em nosso estudo será importante identificar se tais vetores $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ são **Linearmente Dependentes (LD)** ou **Linearmente Independentes (LI)**.

Definição 2. *Sejam $V = \mathbb{R}^m$ ou $V = \mathbb{C}^m$ um espaço vetorial e $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ vetores de V. Dizemos que o conjunto de vetores $\{x^{(1)}, ..., x^{(n)}\}$ é **linearmente independente (LI)** se*

$$c_1 x^{(1)} + ... + c_n x^{(n)} = 0 \tag{1.7}$$

*admita apenas a solução trivial $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Caso contrário, se existem soluções para algum $c_i \neq 0$ com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dizemos que o conjunto $\{x^{(1)}, ..., x^{(n)}\}$ é **linearmente dependente (LD)**.*

Considere um conjunto de n vetores com n componentes. Seja $x_{ij} = x_i^{(j)}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Podemos escrever a Eq.(1.7) da forma

$$Xc = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se $\det X \neq 0$, temos que a única solução é $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ e assim concluímos que o conjunto de vetores é **(LI)**. Caso contrário tem soluções não nulas, ou seja, $c_k \neq 0$ para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$, portanto **(LD)**.

Exemplo 1. *Determine se os seguintes vetores são linearmente independentes ou linearmente dependentes.*

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ e } x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Se os vetores $x^{(1)}, x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ são linearmente dependentes devemos achar c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)} = 0 \tag{1.8}$$

Podemos escrever a Eq.(1.8) da forma $Xc = 0$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0$$

Para encontrar c_1, c_2 e c_3 usaremos o auxílio das operações elementares por linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 6 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Somando a linha 2 pelo oposto do produto de 2 pela linha 1, obtemos a linha 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 6 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Somando o oposto da linha 1 com a linha 3, obtemos a linha 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 6 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a linha 2 por 3 e somando o oposto com o resultado obtido com a linha 3, obtemos a linha 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos o sistema equivalente ao sistema original

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, $c_1 = 0$ *e* $c_3 = -2c_2$ *e escolhendo de forma arbitrária* $c_2 = 1$ *temos que*

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -2 \end{cases}$$

Portanto, da Eq.(1.8)

$$0x^{(1)} + 1x^{(2)} - 1x^{(3)} = 0$$

$$x^{(2)} - x^{(3)} = 0$$

Concluímos que $x^{(1)}, x^{(2)}$ *e* $x^{(3)}$ *são LD.*

De forma alternativa podemos usar a contra-positiva o teorema 1 que nos garante que se $\det(x_i^{(j)}) = 0$ *os vetores* $x^{(1)}, x^{(2)}$ *e* $x^{(3)}$ *são LD.*

$$\det(x_i^{(j)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

O cálculo do determinante é feito de maneira simples e fica a cargo do leitor. Concluímos que os vetores $x^{(1)}, x^{(2)}$ *e* $x^{(3)}$ *são LD.*

Um caso importante é reconhecer os casos de linearmente dependente e linearmente independente para conjuntos de funções vetoriais. Sejam $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ *funções vetoriais definidas* $L : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$. *Os vetores são ditos LD se existem um conjunto de constantes* $c_1, \ldots, c_n$ *para algum não nulo, tais que*

$$c_1 x^{(1)}(t), ..., c_n x^{(n)}(t) = 0$$

Caso contrário dizemos que os vetores são LI.

1.6.3 Autovalores e Autovetores

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$.Dada a equação

$$Ax = y$$

o vetor x é aplicado na transformação que é transformado em um vetor y. Uma pergunta pertinente é para quais vetores x aplicados na transformação obtemos um múltiplo de x, ou seja, quais vetores aplicados na transformação geram um vetor de mesma direção. Para encontrar tais vetores chamamos $y = \lambda x$, para λ (real ou complexo) não nulo e obtemos a equação

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ax - \lambda x &= 0 \qquad (1.9) \\ (A - \lambda I)x &= 0 \end{aligned}$$

Para que tenhamos solução não nula deveremos escolher λ de forma que

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad (1.10)$$

Caso contrário $\det(A-\lambda I) \neq 0$, teríamos somente a solução trivial o que não é interessante.

Segue,

$$\det(A - \lambda I) = P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Chamamos $P(\lambda)$ de polinômio característico de grau n.

Os λ que satisfazem a Eq.(1.10) são chamados de autovalores da matriz A e v são chamados de autovetores os vetores associados aos autovalores λ. Para encontrar os autovalores resume encontrar as raízes do polinômio característico de grau n.

A Eq.(1.10) é uma equação polinomial de grau n em λ, assim existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ raízes da Eq.(1.10) podendo conter raízes iguais tais que $\lambda_i = \lambda_j$, onde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se um autovalor aparecer m vezes como raiz da Eq.(1.10) dizemos que tem multiplicidade algébrica m. Cada autovalor possui pelo menos um autovetor associado e um autovalor de multiplicidade algébrica m tem q autovetores LI e q é chamado de multiplicidade geométrica, com

$$1 \leq q \leq m.$$

Se todos os autovalores forem simples (multiplicidade algébrica um) temos para autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distintos um conjunto de autovetores $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ LI um para cada autovalor.

Caso 1: Raízes reais distintas

Exemplo 1. *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para encontrar os autovalores e autovetores devemos encontrar primeiramente os autovalores através da seguinte equação.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Segue,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3 - \lambda)(2 - \lambda) - (-4) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Resolvendo a equação obtemos os autovalores $\lambda_1 = -2$ *e* $\lambda_2 = 1$.

Para $\lambda_1 = -2$.

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 - (-2) & 4 \\ -1 & 2 - (-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

daí obtemos

$$\left\{ x_1 = 4x_2 \right.$$

temos $x_1 = 4x_2$*, então*

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 4x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $x_2 = 1$*, temos que o autovetor associado ao autovalor* $\lambda_1 = -2$ *é* $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} -3-1 & 4 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Daí obtemos

$$\left\{ -x_1 = x_2 \right.$$

temos $x_1 = x_2$*, então*

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Portanto, para $x_1 = 1$ *temos que o autovetor associado ao autovalor é*

$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Note que em ambos os casos existe uma família de autovetores associado aos autovalores. Nesses casos escolhemos sem perda de generalidade um autovetor associado a cada autovalor que representa a família de autovetores.

Caso 2: Raízes reais de multiplicidade $m \leq n$

Exemplo 2. *Encontre os autovalores e autovetores da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar os autovalores da matriz A devemos resolver o polinômio característico

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Segue,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \tag{1.11}$$

As raízes da Eq.(1.11) *são* $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ *e* $\lambda_3 = -1$. *Observe que o autovalor* -1 *tem multiplicidade algébrica* $m = 2$.

Vamos encontrar o autovalor associado a $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Através das operações elementares por linha e resolvendo o sistema associado teremos o seguinte resultado

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -1$, *temos a equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Assim, em notação vetorial temos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Obtemos uma família de autovetores, mas basta um autovetor para representar a fa-

mília de autovetores. Sendo assim tomemos $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 0$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Neste caso existem dois autovetores linearmente independentes associado ao autovalor de multiplicidade 2. Tome $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 1$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Uma classe importante de matrizes são as **hermitianas (autoadjuntas)**. Um exemplo de matriz autoadjunta são as matrizes simétricas reais, onde os autovalores e autovetores possuem algumas propriedades importantes:

$i.$ Todo os autovalores são reais.

$ii.$ Sempre existe um conjunto completo n de autovetores LI não importando a multiplicidade dos autovalores.

$iii.$ Se $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são autovetores correspondente a autovalores distintos, então $\langle x^{(1)}, x^{(2)} \rangle = 0$, ou seja, $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são ortogonais.

$iv.$ É possível escolher m autovetores ortogonais associados a autovalores de multiplicidade m.

O Exemplo 2 descreve exatamente os itens i, ii e iii, mas não o item iv. Procedendo de forma análoga do exercício anterior podemos arbitrar valores para $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$ que teríamos os autovetores

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são autovetores ortogonais entre si e temos ainda a ortogonalidade com o autovetor $x^{(1)}$.

Caso 3: Autovalores complexos

Exemplo 3. *Encontre os autovalores e autovetores da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar os autovalores da matriz A devemos resolver o polinômio característico

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Segue,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Daí encontramos as raízes complexas $\lambda_1 = i$ e $\lambda = -i$.

Agora encontraremos o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = i$.

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema encontramos o autovetor

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vamos encontrar o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -i$.

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema encontramos o autovetor

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.7 Matrizes Diagonalizáveis

Suponha que a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tenha um conjunto completo de autovetores $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$ linearmente independentes e formamos a matriz

$$M = \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^1 & \dots & v_n^n \end{pmatrix}$$

Note que a matrix M possui inversa, de fato suas colunas são formadas por autovetores LI, então $\det M \neq 0$ e por sua vez possui a inversa e chamamos M^{-1}.

Temos que

$$M^{-1}AM = D$$

onde ,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Esse processo é conhecido como uma transformação de semelhança e dizemos que a matriz A é semelhante a matriz diagonal D.

Por fim, observamos que a matriz A tiver menos que n vetores linearmente independentes, então não existe a matriz M, tal que $M^{-1}AM = D$ e assim, A não é semelhante a nenhuma matriz diagonal e não é diagonalizável.

Para complementação dos estudos o conteúdo pode ser encontrado em [3].

2 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

"*Eis a matemática - a criação mais original do engenho humano.*"

Karl Weierstrass

2.1 Equação Diferencial Ordinária

Definição 1. *Umas equação diferencial ordinária é uma relação que envolve uma função incógnita e derivadas desta função.*

Exemplo 1. $\dfrac{dy}{dx} + y = 2$ *e* $\dfrac{d^2y}{dx^2} + f(x)\dfrac{dy}{dx} + G(x)y = 1$

Definição 2. *A ordem de uma equação diferencial ordinária é dada pela da maior derivada na equação.*

Exemplo 2. $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 5$ *(Equação diferencial de primeira ordem)*

Exemplo 3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + f(x)\dfrac{dy}{dx} + G(x)y = 1$ *(Equação diferencial de segunda ordem)*

2.2 Equação Diferencial Ordinária linear de Primeira Ordem

Definição 3. *Uma equação diferencial de primeira ordem é da seguinte forma:*

$$y' + f(x)y = h(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Chamamos de equação diferencial homogênea, se $h(x) = 0$, para todo x pertencente ao intervalo $\alpha < x < \beta$. Caso contrário chamamos de equação diferencial não-homogênea.

2.3 Equação Diferencial Ordinária linear de Segunda Ordem

Definição 4. *Uma equação diferencial de segunda ordem é da seguinte forma:*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

Chamamos de equação diferencial homogênea, se $h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Caso contrário chamamos de equação diferencial não-homogênea.

Definição 5. *Chamamos de equação de segunda (primeira) ordem de coeficientes constantes se $f(x)$ e $g(x)$ são funções constantes nos reais.*

Definição 6. *Toda função Φ, definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I, as quais quando substituídas na equação diferencial ordinária de ordem* *n reduzem a equação diferencial a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo.*

2.4 Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Existem muitos problemas de diversas áreas aplicadas que estão associadas de alguma forma, por exemplo, na física temos um sistema de massa-mola. Alguns problemas descrevem modelos matemáticos que consistem em um sistema de duas ou mais equações diferenciais de ordem n que sempre pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Vamos denotar a variável independente por t e as variáveis dependentes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em função de t.

Considere o sistema massa-mola da figura (1a). A duas massas se movem em uma uma superfície sem atrito sob a influência de duas forças $F_1(t)$ e $F_2(t)$ e são, também restringidas em seu momento pelas três molas de constante k_1, k_2 e k_3.

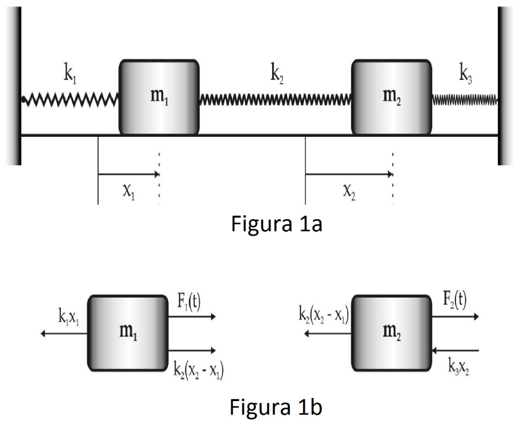

Figura 1: Sistema Massa-Mola.

Vamos considerar $x_1 < x_2$ e o movimento para direita. Neste caso as molas 1 e 2 estão alongadas e a mola 3 está comprimida. O diagrama de forças está definido na Figura (1b), usando a 1° lei de Newton $F = ma$, temos.

$$\begin{aligned}
m_1a_1 &= k_2(x_2 - x_1) + F_1(t) - k_1x_1 \\
m_1a_1 &= k_2x_2 - k_2x_1 + F_1(t) - k_1x_1 \\
m_1a_1 &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + F_1(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2a_2 &= F_2(t) - k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \\
m_2a_2 &= F_2(t) - k_2x_2 + k_2x_1 - k_3x_2 \\
m_2a_2 &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t)
\end{aligned}$$

Como $a_1 = \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = x_1''$ e $a_2 = \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = x_2''$ temos o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} m_1x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + F_1(t) \\ m_2x_2'' = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

Obtemos um sistema de equações diferencias ordinárias de ordem 2. Nosso objetivo é transformar a Eq.(2.1) em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Sejam

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_1', y_4 = x_2' \tag{2.2}$$

Daí,

$$y_1' = x_1', y_2' = x_2', y_3' = x_1''$$

e $y_4' = x_2''$

Concluímos que

$$y_1' = y_3 \text{ e } y_2' = y_4$$

Agora substituindo a Eq.(2.2) na Eq.(2.1), temos:

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ m_1y_3' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2y_2 + F_1(t) \\ m_2y_4' = k_2y_1 - (k_2 + k_3)y_2 + F_2(t) \end{cases}$$

Agora considere a equação diferencial de segunda ordem de coeficientes constantes.

$$t'' + at' + bt + c = F(t) \tag{2.3}$$

Queremos transformar a Eq.(2.3) em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Sejam $x_1 = t, x_2 = t'$, então $x_2' = t''$ e $x_1' - t'$. Daí encontramos o sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' + ax_2 + bx_1 + c = F(t) \end{cases}$$

Podemos estender esta ideia para um sistema de n equações de primeira ordem.

$$\begin{cases} x_1' = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases} \tag{2.4}$$

Vamos usar o auxílio de matrizes para trabalhar com o sistema de equações diferenciais, caso contrário o trabalho pode se tornar árduo. Então transformando o sistema (2.4) em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \ldots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & \ldots & p_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

Ou ainda,

$$x' = P(t)x + g(t) \tag{2.5}$$

para $\alpha < t < \beta$

Teorema 3. *Se as funções $p_{11}(t), \ldots, p_{nn}(t)$ e $g_1, \ldots, g_n$ forem contínuas no intervalo $\alpha < t < \beta$, então existirá uma única solução $x_1 = \Phi_1(t), \ldots, x_n = \Phi_n(t)$do sistema (2.5). Além disso, a solução existe em todo o intervalo $\alpha < t < \beta$.*

Referência[2]

Um caso particular embora muito importante é o caso $g(t) = 0$, então a Eq.(2.5) se torna

$$x' = P(t)x \tag{2.6}$$

e chamamos a Eq.(2.6) de sistemas de equações diferenciais homogêneo.

Teorema 4. *Se as funções vetoriais* $x^{(1)}, , x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ *são soluções do sistema Eq.*(2.6)*, então a combinação linear* $c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_n x^{(n)}$ *também é solução da Eq.*(2.6)*.*

Demonstração. Sejam $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ soluções da equação $x' = P(t)x$. Como $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ são soluções temos

$$\begin{cases} (x^{(1)})' = P(t)x^{(1)} \\ (x^{(2)})' = P(t)x^{(2)} \\ \qquad \vdots \\ (x^{(n)})' = P(t)x^{(n)} \end{cases}$$

se multiplicarmos constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ respectivamente nas equações, obtemos

$$\begin{cases} c_1(x^{(1)})' = c_1 P(t)x^{(1)} \\ c_2(x^{(2)})' = c_2 P(t)x^{(2)} \\ \qquad \vdots \\ c_n(x^{(n)})' = c_n P(t)x^{(n)}. \end{cases}$$

Somando as equações,

$$\begin{aligned} & c_1(x^{(1)})' + c_2(x^{(2)})' + \ldots + c_n(x^{(n)})' = c_1 P(t)x^{(1)} + c_2 P(t)x^{(2)} + \ldots + c_n P(t)x^{(n)} \\ \Rightarrow\ & c_1(x^{(1)})' + c_2(x^{(2)})' + \ldots + c_n(x^{(n)})' = P(t)(c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_n x^{(n)}) \end{aligned}$$

Portanto, $x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_n x^{(n)}$ é solução do sistema de equações diferenciais ordinárias homogêneo $x' = P(t)x$. $\square$

2.5 Wronskiano

Definição 1. *Sejam* $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ *funções vetoriais de* $\mathbb{R}^n$ *definidas em* $\alpha < t < \beta$*. Definimos o Wronskiano como o determinate da matriz*

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \ldots & x_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

que é denotado por $W[x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)] = \det X(t)$*.*

Pelo Teorema 1 uma matriz quadrada tem seu determinante diferente de zero se, somente se, suas colunas são linearmente independentes (LI). Este resultado nos leva a pensar que o Wronskiano é diferente de zero em $\alpha < t < \beta$ se os vetores $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ são (LI) e portanto neste caso $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ gera uma base para o espaço solução.

Teorema 5. *Sejam $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ soluções da equação $x' = P(t)x$ no intervalo $\alpha < t < \beta$, então $W[x^{(1)}, x^{(2)}]$ é identicamente nulo ou nunca se anula no intervalo.*

Demonstração. Sejam $x^{(1)}, x^{(2)}$ soluções da equação $x' = P(t)x$ e o Wronskiano dado por $W[x^{(1)}, x^{(2)}]$. Então,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dx_1^1}{dt}x_2^2 + x_1^1\frac{dx_2^2}{dt} - \frac{dx_2^1}{dt}x_1^2 - x_2^1\frac{dx_1^2}{dt}$$

Temos ainda $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ soluções da equação $x' = P(t)$, então

$$\begin{aligned}(p_1^1 + p_2^2)W &= (p_1^1 + p_2^2)(x_1^1x_2^2 - x_2^1x_1^2)\\ (p_1^1 + p_2^2)W &= p_1^1x_1^1x_2^2 - p_1^1x_2^1x_1^2 + p_2^2x_1^1x_2^2 - p_2^2x_2^1x_1^2\end{aligned}$$

No entanto,

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= (p_{11}x_1^1 + p_{12}x_2^1)x_2^2 + x_1^1(p_{21}x_1^2 + p_{22}x_2^2) - (p_{21}x_1^1 + p_{22}x_2^2)x_2^2\\ &- (p_{21}x_1^1 + p_{22}x_2^1)x_2^2 - x_2^1(p_{11}x_1^2 + p_{12}x_2^2)\\ &= p_{11}x_1^1x_2^2 + p_{11}x_2^2x_2^2 - p_{22}x_1^2x_2^1 - p_{11}x_2^1x_1^2\\ &= (p_{11} + p_{22})W\end{aligned}$$

Ou seja, o Wronskiano W satisfaz a equação $x' = P(t)x$. então,

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= (p_{11} + p_{22})W\\ dW\frac{1}{W} &= (p_{11} + p_{22})dt\\ \int \frac{1}{W}dW &= \int (p_{11} + p_{22})dt\\ \ln|W| &= \int (p_{11} + p_{22})dt\\ W &= ce^{\int (p_{11}+p_{22})dt}\end{aligned}$$

Como $f(t) = e^t > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e Como $c = 0$ ou $c \neq 0$, temos $W[x^{(1)}, x^{(2)}]$ é identicamente nulo ou $W[x^{(1)}, x^{(2)}]$ nunca anula no ponto no intervalo $\alpha < t < \beta$. $\square$

Este resultado pode ser generalizado para n soluções e demostrado de forma análoga ao teorema anterior.

Portanto, para n soluções o Wronskiano $W[x^{(1)},\ldots,x^{(n)}] = 0$ ou $W[x^{(1)},\ldots,x^{(n)}] \neq 0$ para todo $\alpha < t < \beta$. Com este resultado nos livra de verificar se Wronskiano é identicamente nulo ou nunca se anula em todo os pontos do intervalo.

2.6 Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes

Seja $x' = Ax$ um sistema homogêneo e A uma matriz de coeficientes constantes reais. Podemos generalizar para obter a solução geral do sistema usando o conceito de exponencial de matriz e podemos procurar uma solução da equação $x' = Ax$ envolvendo exponencial. Associando a solução da equação diferencial ordinária com o sistema $x' = Ax$ esperamos encontrar uma solução da forma

$$x = ve^{At},$$

onde v é um vetor e A uma matriz a determinar. Iremos generalizar o sistema linear com coeficiente constante de ordem 2.

Suponha que temos como solução $x = ve^{\lambda t}$, onde v e λ são a determinar. Substituindo $x = ve^{At}$ na equação $x' = \lambda x$ temos,

$$\lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t}$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ podemos cancelar $e^{\lambda t}$, Obtemos

$$\begin{aligned} \lambda v &= Av \\ \lambda v - Av &= 0 \\ (A - \lambda I)v &= 0 \end{aligned}$$

Para que possua solução não nula ficaremos condicionado

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Portanto, para resolvermos o sistema de equações diferenciais fica resumido em achar o autovalores e autovetores da matriz A. Em relação aos autovetores podemos encontrar três casos possíveis.

i. Autovalores reais distintos.

ii. Pares de autovalores complexos conjugados.

iii. Autovalores repetidos.

Exemplo 1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 8x_1 + x_2 \end{cases}$$

Na forma matricial

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} x$$

Como visto anteriormente para resolver o sistema diferencial precisamos encontrar os autovalores e autovetores.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau encontramos os autovalores $\lambda_1 = 5$ *e* $\lambda_2 = -3$*.*

Para encontrar o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 5$ *procedemos da seguinte maneira.*

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 8 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -4v_1 + v_2 = 0 \\ 8v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases}$$

Portanto, $v_2 = 2v_1$*. Assim,*

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para $v_1 = 1$ *o autovetor é dado por*

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Como a solução do sistema é dado por $x = ve^{\lambda t}$, *logo*

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Para $\lambda_1 = -3$.

$$\begin{pmatrix} 1-(-3) & 2 \\ 8 & 1-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 4v_1 + 2v_2 = 0 \\ 8v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases}$$

Daí, $v_2 = -2v_1$ *e obtemos*

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para $v_1 = 1$ *o autovetor é dado por*

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Temos que verificar que $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ formam uma base para o espaço solução.

$$W[x^{(1)}, x^{(2)}] = \begin{vmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ 2e^{5t} & -2e^{-3t} \end{vmatrix} = (-2-2)e^{2t} \neq 0$$

Portanto, $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são LI. Como a solução geral é dada por $x = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ então,

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Exemplo 2. *Resolva a equação diferencial*

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} x.$$

Primeiramente encontraremos os autovetores e autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar o autovalor devemos ter $\det(A - \lambda I) = 0$*, ou seja,*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} &= (-3-\lambda)(-2-\lambda) - 2 \\ &= 6 + 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação obtemos $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -4$

Para $\lambda_1 = -1$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -3-(-1) & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{cases} -2v_1 + \sqrt{2}v_2 = 0 \\ \sqrt{2}v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

Como as equações são equivalentes, temos $\sqrt{2}v_1 = v_2$*, então o autovetor é dado por*

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \sqrt{2}v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Para $v_1 = 1$ *o autovetor é dado por*

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Portanto, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t}$.

Para $\lambda_2 = -4$.

$$\begin{pmatrix} -3-(-4) & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-(-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{cases} v_1 + \sqrt{2}v_2 = 0 \\ \sqrt{2}v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases}$$

Como as equações são equivalentes, temos $-\sqrt{2}v_2 = v_1$*, então o autovetor é dado por*

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $v_2 = 1$ *o autovetor é dado por*

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$.

Como $W[x^{(2)}, x^{(2)}] \neq 0$*, então temos que a solução é dada por*

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

Os dois exemplos anteriores ilustram o caso de autovalores reais e distintos.

Exemplo 3. *Resolva a equação diferencial*

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} x.$$

Vamos achar os autovalores

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ (3-\lambda)^2(-\lambda) + 32 + 16\lambda - 8(3-\lambda) &= 0 \\ (9 - 6\lambda + \lambda^2)(-\lambda) + 32 + 16\lambda - 24 + 8\lambda &= 0 \\ -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 8 + 24\lambda &= 0 \\ -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Note que $\lambda_1 = 8$. Com o método Briot-Ruffini obtemos

$$(\lambda - 8)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0$$

e assim concluímos que os autovetores são $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$.

Vamos encontrar os autovetores.

Para $\lambda_1 = 8$.

$$\begin{pmatrix} 3-8 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & 3-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema encontramos o autovetor

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 2v_2 \\ v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para $v_2 = 1$ o autovetor é dado por

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Portanto, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t}$.

Para $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3-(-1) & 2 & 4 \\ 2 & -(-1) & 2 \\ 4 & 2 & 3-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema encontramos o autovetor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 - 2v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $v_1 = 1, v_3 = 0$ *e* $v_1 = 0, v_3 = 1$ *respectivamente os autovetores são dados por*

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo, a solução geral é dada por

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Este exemplo mostrou o caso que nem todos os autovalores são repetidos. O próximo exemplo ilustra o caso que os autovalores são apenas repetidos.

Exemplo 4. *Considere a equação diferencial*

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$$

Para encontrar o autovalor devemos ter o $\det(A - \lambda I) = 0$*, ou seja,*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (-3-\lambda)(-1-\lambda)+4 \\ &= -3-3\lambda+\lambda+\lambda^2+4 \\ &= \lambda^2-2\lambda+1 \\ &= (\lambda-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Para encontrar o autovetor prosseguimos da seguinte maneira.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{cases} 2v_1 - 4v_2 = 0 \\ v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases}$$

as equações são equivalentes, temos $v_1 = 2v_2$*, então o autovetor é dado por*

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $v_2 = 1$ *o autovetor é dado por*

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$.

Como temos autovalores repetidos e um autovetor, segundo [2] devemos procurar uma solução da forma

$$x^{(2)} = vte^t + \gamma e^t$$

Substituindo na equação inicial

$$\begin{aligned}
ve^t + vte^t + \gamma e^t &= A(vte^t + \gamma e^t)\\
ve^t + vte^t + \gamma e^t &= Avte^t + A\gamma e^t\\
v + vt + \gamma &= Avt + A\gamma\\
v &= (A-I)vt + (A-I)\gamma
\end{aligned}$$

Igualando os termos

$$(A-I)v = 0$$

$$(A-I)\gamma = v$$

A solução será satisfeita se v for um autovetor.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\gamma_1 - 4\gamma_2 & = 2 \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 & = 1 \end{cases}$$

Como a as equações são múltiplas, $\gamma_1 = 1 + 2\gamma_2$.

Logo,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 + 2\gamma_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como a segunda parcela é um múltiplo do vetor $v^{(1)}$ podemos descartar.

Portanto, a solução é dada por

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

Logo, a solução geral é

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \right]$$

Agora vamos tratar o caso que os autovalores são complexos.

Vamos considerar novamente a equação $x' = Ax$, onde A é uma matriz constante, ou seja, possui seus coeficientes constantes. Se um autovalor for complexo da forma $\lambda_1 = a + bi$ temos que o outro autovalor é dado pelo conjugado de λ_1 e seus autovetores serão complexos e temos ainda que $v^{(2)}$ será o conjugado do autovetor $v^{(1)}$. Mais informações em [2].

Suponha que $\lambda_1, v^{(1)}$ e $\lambda_2, v^{(2)}$ são autovalores e autovetores de A respectivamente, então as soluções são dadas por

$$x^{(1)} = v^{(1)}e^{\lambda_1 t} \text{ e } x^{(2)} = v^{(2)}e^{\lambda_2 t}$$

Como $v^{(2)} = \bar{v^{(1)}}$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda_1}$ temos como solução

$$x^{(1)} = v^{(1)}e^{\lambda_1 t} \text{ e } x^{(2)} = \bar{v^{(1)}}e^{\bar{\lambda_1} t}$$

Podemos encontrar a solução real da Eq.(2.6) dos autovetores $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ tomando a parte real e a parte imaginária das soluções $v^{(1)}$ ou $v^{(2)}$. Sem perda de generalidade vamos escolher a solução $v^{(1)}$, onde $v^{(1)} = a + bi$ e $\lambda_1 = \beta + \mu i$. Como $e^{\mu i t} = \cos \mu t + \sin \mu t$(Disponível em[7]), temos

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= (a + bi)e^{(\beta+\mu i)t} \\
x^{(1)} &= (a + bi)e^{\beta t}e^{\mu i t} \\
x^{(1)} &= (a + bi)e^{\beta t}(\cos(\mu t) + i \sin(\mu t)) \\
x^{(1)} &= e^{\beta t}(a \cos(\mu t) - b \sin(\mu t)) + ie^{\beta t}(b \cos(\mu t) + a \sin(\mu t))
\end{aligned}$$

Considerando que $x^{(1)}(t) = u(t) + iv(t)$, temos

$$\begin{aligned}
u(t) &= e^{\beta t}(a \cos(\mu t) - b \sin(\mu t)) \\
v(t) &= e^{\beta t}(b \cos(\mu t) + a \sin(\mu t))
\end{aligned}$$

São soluções da Eq.(2.6), de fato $u(t)$ e $v(t)$ são LI.

Vamos mostrar que $u(t)$ e $v(t)$ são LI. Sejam $v^{(1)} = a + bi$ e $v^{(2)} = a - bi$ autovetores. Primeiramente queremos mostrar que a e b são LI, onde a e b são vetores de mesma dimensão.

$$\begin{aligned}
v^{(1)} &= a + bi \\
v^{(2)} &= a - bi
\end{aligned}$$

Isolando a e b em função de $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$, segue que,

$$
\begin{aligned}
&c_1 a + c_2 b = 0 \\
\Leftrightarrow &c_1 \frac{1}{2}(v^{(1)} + v^{(2)}) - c_2 \frac{1}{2} i (v^{(2)} - v^{(1)}) = 0 \\
\Leftrightarrow &c_1 (v^{(1)} + v^{(2)}) - c_2 i (v^{(2)} - v^{(1)}) = 0 \\
\Leftrightarrow &c_1 v^{(1)} + c_1 v^{(2)} - c_2 v^{(2)} i + c_2 v^{(1)} i = 0 \\
\Leftrightarrow &(c_1 + c_2 i) v^{(1)} + (c_1 - c_2 i) v^{(2)} = 0
\end{aligned}
$$

Temos que $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ são autovetores, então $v^{(1)}$ e $v^{(2)}$ são LI, daí concluímos que $(c_1 + c_2 i) = 0$ e $(c_1 - c_2 i) = 0$ e portanto $c_1 = c_2 = 0$. Logo, a e b são LI.

Agora queremos mostrar que $u(t)$ e $v(t)$ são LI, Ou seja, queremos mostrar

$$c_1 u(t) + c_2 v(t) = 0$$

Então $c_1 = c_2 = 0$.

De

$$
\begin{aligned}
u(t) &= e^{\lambda t}(a \cos(\mu t) - b \sin(\mu t)) \\
v(t) &= e^{\lambda t}(a \sin(\mu t) + b \cos(\mu t))
\end{aligned}
$$

Temos

$$
\begin{aligned}
&c_1 e^{\lambda t}(a \cos(\mu t) - b \sin(\mu t)) + c_2 e^{\lambda t}(a \sin(\mu t) + b \cos(\mu t)) = 0 \\
\Leftrightarrow &c_1(a \cos(\mu t) - b \sin(\mu t)) + c_2(a \sin(\mu t) + b \cos(\mu t)) = 0 \\
\Leftrightarrow &a(c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t)) + b(c_2 \cos(\mu t) - c_1 \sin(\mu t)) = 0
\end{aligned}
$$

Como a e b são LI, temos que

$$
\begin{cases}
c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t) = 0 \\
c_2 \cos(\mu t) - c_1 \sin(\mu t) = 0
\end{cases}
$$

Da primeira equação tiramos

$$c_1 = -c_2 \frac{\sin(\mu t)}{\cos(\mu t)} = -c_2 \tan(\mu t) \Longrightarrow -\frac{c_1}{c_2} = \tan(\mu t) \tag{2.7}$$

Da segunda equação tiramos

$$c_2 = c_1 \frac{\sin(\mu t)}{\cos(\mu t)} = c_1 \tan(\mu t) \Longrightarrow \frac{c_2}{c_1} = \tan(\mu t) \tag{2.8}$$

Igualando eq.(2.7) e eq.(2.8)

$$-\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_2}{c_1} \Longrightarrow -(c_1)^2 = (c_2)^2$$

Como $(c_1)^2 \geq 0$ e $(c_2)^2 \geq 0$, então $c_1 = c_2 = 0$.

Portanto, $u(t)$ e $v(t)$ são LI.

Exemplo 5. *Considere a equação diferencial*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} x$$

Primeiramente encontraremos os autovalores. Para encontrar o autovalor devemos ter $\det(A - \lambda I) = 0$*, ou seja,*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(-3-\lambda) + 5 \\ &= -3 - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 5 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação encontramos os autovalores $\lambda_1 = -1 + i$ *e* $\lambda_2 = -1 - i$.

Vamos encontrar o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1 + i$.

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{cases} (2-i)v_1 - v_2 = 0 \\ 5v_1 - (2+i)v_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema observamos que v_1 *é uma variável livre, então*

$$v_2 = (2-i)v_1$$

Logo, o autovetor é dado por

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ (2-i)v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

Para $v_1 = 1$ *o autovetor é dado por*

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

Temos ainda que o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -1 - i$ *é dado por*

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

Assim,

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} \text{ e } x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$$

Para obter a solução real devemos encontrar a parte real e a parte imaginária de $x^{(1)}$ *ou* $x^{(2)}$ *vamos escolher sem perda de generalidade a solução* $x^{(1)}$.

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{-t}e^{it} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{-t}(\cos t + i\sin t) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t + ie^{-t}\sin t \\ (2-i)e^{-t}(\cos t + i\sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t + ie^{-t}\sin t \\ (2-i)e^{-t}\cos t + (2-i)ie^{-t}\sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t + ie^{-t}\sin t \\ 2e^{-t}\cos t - ie^{-t}\cos t + 2ie^{-t}\sin t + e^{-t}\sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t + ie^{-t}\sin t \\ (2e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t) + (-ie^{-t}\cos t + 2ie^{-t}\sin t \end{pmatrix} \\ &= e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + ie^{-t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} \text{ e } v(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

Assim, a solução geral é dada

$$x = c_1e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

2.6.1 Sistemas Lineares Não Homogêneos

Seja o sistema não homogêneo

$$x' = P(t)x + g(t)$$

Onde $P(t)$ é uma matriz e $g(t)$ um vetor. A solução geral é dada por

$$x = c_1x^{(1)} + \ldots + c_nx^{(n)} + v(t),$$

onde $c_1x^{(1)}+\ldots+c_nx^{(n)}$ é uma solução geral da equação homogênea e o vetor $v(t)$ uma solução particular do sistema não homogêneo. Temos maneiras de encontrar a solução particular e estudaremos cada uma separadamente.

A primeira maneira é através da diagonalização de matriz. Vamos trabalhar no caso que $P(t)$ seja uma matriz constante. Digamos $P(t) = A$, então

$$x' = Ax + g(t) \tag{2.9}$$

O objetivo da diagonalização da matriz A é podermos resolver cada equação do sistema separadamente. Defina uma nova variável y e M a matriz cuja suas colunas são autovetores de A tal que $x = My$. Substituindo na eq.(2.9) temos,

$$\begin{aligned} My' &= AMy + g(t) \\ (M^{-1}M)y' &= (M^{-1}AM)y + M^{-1}g(t) \\ y' &= Dy + h(x) \end{aligned}$$

onde, $h(x) = M^{-1}g(t)$ e D a matriz diagonal.

Com a diagonalização obtemos n equações da forma

$$y_i' = \lambda_i y_i + h_i$$

com $i = 1, \ldots, n$

Esta equação pode ser escrita ainda na forma

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + h_i$$

Para encontrar a solução procedemos da seguinte maneira.

Multiplicamos pela função $\mu(t)$ no qual queremos encontrar

$$\mu(t)\frac{dy_i}{dt} = \mu(t)\lambda_i y_i + \mu(t)h_i$$
$$\mu(t)\frac{dy_i}{dt} - \mu(t)\lambda_i y_i = \mu(t)h_i \tag{2.10}$$

comparando eq.(2.10) com a derivada

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y$$

Temos

$$\frac{d\mu}{dt} = -\mu\lambda_i$$
$$d\mu\frac{1}{\mu} = -\lambda_i dt$$

Integrando

$$\int \frac{1}{\mu}d\mu = \int -\lambda_i dt$$
$$\int \frac{1}{\mu}d\mu = -\lambda_i \int dt$$
$$\ln|\mu| = -\lambda_i t + c$$
$$\mu = e^{-\lambda_i t + c}$$
$$\mu = c_1 e^{-\lambda_i t}$$

Como não precisamos de μ mais geral possível, escolhemos $c_1 = 1$ e obtemos

$$\mu = e^{-\lambda_i t}$$

Escolhemos μ de tal maneira que obtemos o lado direito da Eq.(2.10) igual a $\frac{d}{dt}(\mu y)$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda_i t}y_i) = h_i e^{-\lambda_i t}$$

Integrando em ambos os lados

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_i t} y_i + c_i &= \int h_i e^{-\lambda_i t} dt \\ e^{-\lambda_i t} y_i + c_i &= \int h_i e^{-\lambda_i t} dt \\ e^{-\lambda_i t} y_i &= \int h_i e^{-\lambda_i t} dt - c_i \\ y_i &= e^{\lambda_i t} \int h_i e^{-\lambda_i t} dt - c_i e^{\lambda_i t} \end{aligned}$$

Finalmente a solução da (2.9) é obtida através da equação $x = My$, onde y é dado por $y_i = e^{\lambda_i t} \int h_i e^{-\lambda_i t} dt - c_i e^{\lambda_i t}$.

Definição 1. *Suponha que $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ formam um conjunto de soluções para equação homogênea $x' = P(t)x$, para todo intervalo $\alpha < t < \beta$. Então a matriz fundamental é dada por,*

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \ldots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \ldots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

cujas as colunas são os vetores $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$.

Variação dos parâmetros: Vamos considerar o caso mais geral possível, onde $P(t)$ é uma matriz não constante ou não diagonalizável.

Considere o sistema

$$x' = P(t)x + g(t) \tag{2.11}$$

Para $P(t), g(t)$ contínuas no intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$.

Seja $\Psi(t)$ a matriz fundamental da equação homogênea $x' = P(t)x$. Suponha que a solução é dada por

$$x = \psi(t)u(t) \tag{2.12}$$

Substituindo na eq.(2.11) temos

$$\psi'(t)u(t) + \psi(t)u'(t) = P(t)u(t) + g(t)$$

Como $\psi'(t) = P(t)\psi(t)$, temos

$$\begin{aligned} P(t)\psi(t)u(t) + \psi(t)u'(t) &= P(t)\psi(t)u(t) + g(t) \\ \psi(t)u'(t) &= g(t) \end{aligned}$$

Como as colunas da matriz $\psi(t)$ são formadas por autovetores que por sua vez são linearmente independentes e temos $\det[\psi(t)] \neq 0$, portanto $\psi(t)$ é invertível, ou seja, existe uma matriz ψ^{-1} tal que $\psi^{-1}\psi = I$.

Daí,

$$\begin{aligned} \psi(t)u'(t) &= g(t) \\ \psi^{-1}(t)\psi(t)u'(t) &= \psi^{-1}(t)g(t) \\ u'(t) &= \psi^{-1}(t)g(t) \end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados

$$u(t) = \int \psi^{-1}(t)g(t)dt + c \tag{2.13}$$

Logo, encontramos a solução geral substituindo a eq.(2.13) na eq.(2.12).

$$\begin{aligned} x &= \psi(t)(\int \psi^{-1}(t)g(t)dt + c) \\ x &= \psi(t)\int \psi^{-1}(t)g(t)dt + \psi(t)c \end{aligned}$$

3 Sistemas de Equações Diferenciais como Modelos Matemáticos

"Ao longo do tempo, muitos homens conseguiram atingir o êxtase da criação. A estes homens, dá-se o nome de MATEMÁTICOS."

Autor Desconhecido

É comum desejar descrever fenômenos da vida real através de expressões matemáticas, esses fenômenos reais podem ser da física, química, economia entre outros. Tais descrições são chamadas de modelo matemático.

Problema 1. *Considere inicialmente três tanques A, B e C cada um com 100 galões de salmoura. Os líquidos bem misturados são bombeados entre os tanques conforme a figura 2.*

Figura 2: Mistura.

Sejam $x_1(t), x_2(t)$ e $x_3(t)$ a quantidade de sal (medida em libras) nos tanques A, B e C no instante t, respectivamente. A taxa a qual $x_1(t), x_2(t)$ e $x_3(t)$ varia é dada por,

$$\frac{d(x_i)}{dt} = (\textit{Taxa de entrada de sal}) - (\textit{Taxa de saída de sal}) = T_e - T_s$$

para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

A taxa de entrada de sal T_e (em libras por min) é igual a taxa de entrada de salmora de sal (em galão por min) multiplicado pela concentração de sal no fluxo de entrada (em libras por galão).

Já a taxa de saída de sal T_s (em libras por min) é igual a taxa de saída de salmoura (em galão por min) multiplicado pela concentração de sal no fluxo de saída(em libras por galão).

Dos galões A, B e C obtemos as seguintes equações diferenciais.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left(4\frac{gal}{min}\right)\left(0\frac{lb}{gal}\right) + \left(2\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{x_2}{100}\frac{lb}{gal}\right) - \left(6\frac{gal}{min}\right)\frac{x_1}{100} \\ \frac{dx_1}{dt} &= \frac{x_2}{50} - \frac{3}{50}x_1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= \left(6\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{x_1}{100}\frac{lb}{gal}\right) + \left(1\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{x_3}{100}\frac{lb}{gal}\right)\\ &- \left(2\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{x_2}{100}\frac{lb}{gal}\right) - \left(5\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{x_2}{100}\frac{lb}{gal}\right)\\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{3}{50}x_1 - \frac{1}{100}x_3 - \frac{7}{100}x_2\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_3}{dt} &= \left(5\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{x_2}{100}\frac{lb}{gal}\right) - \left(1\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{x_3}{100}\frac{lb}{gal}\right) - \left(4\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{x_3}{100}\frac{lb}{gal}\right)\\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{20}x_2 - 5\frac{x_3}{100} = \frac{1}{20}x_2 - \frac{1}{20}x_3\end{aligned} \tag{3.3}$$

Das equações (3.1),(3.2) *e* (3.3) *temos,*

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_2}{50} - \dfrac{3}{50}x_1 \\ x_2' = \dfrac{3}{50}x_1 + \dfrac{1}{100}x_3 - \dfrac{7}{100}x_2 \\ x_3' = \dfrac{1}{20}x_2 - \dfrac{1}{20}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{50} & \frac{1}{50} & 0 \\ \frac{3}{50} & -\frac{7}{100} & \frac{1}{100} \\ 0 & \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Para achar as soluções da equação $x' = Ax$ *devemos primeiramente encontrar os autovalores e autovetores.*

Calculando os autovalores e autovetores e encontramos $\lambda_1 = -\dfrac{1}{10}$ *;*$\lambda_2 = -\dfrac{1}{20}$ *e* $\lambda_3 = -\dfrac{1}{50}$ *e os autovetores associado respectivamente.*

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{48}{100} \\ -\frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix};\ v^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{100} \\ -\frac{6}{10} \\ 1 \end{pmatrix}\ e\ v^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{29}{100} \\ \frac{57}{100} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Segue,

$$x^{(1)} = v^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} \frac{48}{100} \\ -\frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{10}t}$$

$$x^{(2)} = v^{(2)}e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} \frac{18}{100} \\ -\frac{6}{100} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{5}{100}t}$$

$$x^{(3)} = v^{(3)}e^{\lambda_3 t} = \begin{pmatrix} \frac{29}{100} \\ \frac{57}{100} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{2}{100}t}$$

Portanto, a solução geral é dada por $x(t) = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + c_3x^{(3)}$.

Problema 2. *Terremotos de grande magnitude geralmente tem consequências avassaladoras sobre edifícios. Por exemplo, o terremoto de magnitude de* $7,0$ *na escala richter que atingiu Haiti em* 2010 *que provocou uma série de mortos, feridos e desabrigados.*

Diversos edifícios desabaram, inclusive o palácio presidencial da capital Porto Principe. A cidade mais afetada foi a capital, estima-se que mais da metade das construções foram destruídas.

Figura 3: Prédio destruído por um terremoto em Porto Princípe. Foto de Tequila Minsky/ New York Times.

Modelo de deslocamento dos andares de um edifício:

Suponha um prédio de n *andares. Digamos que o i-ésimo andar possua uma massa* m_i *e os andares estejam interligados por uma junção que descreva um movimento semelhante ao de uma mola. Suponha que a lei de Hooke possa ser aplicada com uma constante elástica* k_i *entre o i-ésimo andar e o* $(i+1)$*-ésimo andar. Daí temos que a força é dada por*

$$F = k_i(x_{i+1} - x_i)$$

onde, x_i *é o deslocamento horizontal do i-ésimo andar. Então juntamente com a segunda lei de Newton temos o seguinte sistema de equações diferenciais.*

$$\begin{cases} m_1x_1'' = k_0x_1 + k_1(x_2 - x_1) \\ m_2x_2'' = -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ \qquad \vdots \\ m_nx_n'' = k_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \end{cases} \tag{3.4}$$

Para exemplificar, suponha um prédio de dois andares no qual cada andar possua uma massa $m = 6000kg$ *e uma força restauradora de* $k = 18000\frac{kg}{s^2}$.

Assim da Eq:(2)*, obtemos o sistema de equações diferenciais de segunda ordem*

$$\begin{cases} x_1'' = -6x_1 + 3x_2 \\ x_2'' = 3x_1 - 3x_2 \end{cases} \tag{3.5}$$

Sejam $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_1'$ *e* $y_4 = x_2'$. *Substituindo na Eq:(3.5) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem equivalente.*

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -6y_1 + 3y_2 \\ y_4' = 3y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

Ou ainda podemos escrever o sistema da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

ou ainda,

$$y' = Ay, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando os autovalores e autovetores da matriz A obtemos os seguinte resultados:

$$\lambda_1 = 2,8i \text{ e } v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,5i \\ -0,3i \\ -1,6 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = -2,8i \text{ e } v^{(2)} = \begin{pmatrix} -0,5i \\ 0,3i \\ -1,6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1.07i \text{ e } v^{(3)} = \begin{pmatrix} -0,5i \\ -0,9i \\ 0,6 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_4 = -1.07i \text{ e } v^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,5i \\ 0,9i \\ 0,6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$y^{(1)} = v^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 0,5i \\ -0,3i \\ -1,6 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2,8it};\ y^{(2)} = v^{(2)}e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} -0,5i \\ 0,3i \\ -1,6 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2,8it}$$

$$y^{(3)} = v^{(3)}e^{\lambda_3 t} = \begin{pmatrix} -0,5i \\ -0,9i \\ 0,6 \\ 1 \end{pmatrix} e^{1,07it};\ y^{(4)} = v^{(4)}e^{\lambda_4 t} = \begin{pmatrix} 0,5i \\ 0,9i \\ 0,6 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-1,07it}$$

Portanto, a solução geral do sistema diferencial é dado por

$$y(t) = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + c_3 y^{(3)} + c_4 y^{(4)}$$

Problema 3. *Considere o circuito mostrado na figura 4 contendo um indutor* (L)*, Resistor* (R) *e capacitor* (C)*.*

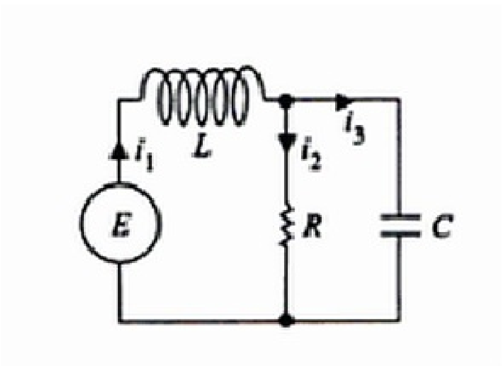

Figura 4: Circuito Elétrico.

Considerando a malha da esquerda , temos pela segunda lei de Kirchhoff que a volta-

gem aplicada $E(t)$ em uma malha fechada deve ser igual a soma das quedas de voltagem, sendo assim obtemos a seguinte equação diferencial

$$E(t) = L\frac{di_1}{dt} + i_2R$$

Agora considere a malha da esquerda, temos a equação

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}q_3 - i_2R &= 0 \\ q_3 - CRi_2 &= 0 \end{aligned}$$

derivando em função de t

$$\frac{dq_3}{dt} - CR\frac{di_2}{dt} = 0$$

Como $\dfrac{dq}{dt} = i$ e $i_1 = i_2 + i_3$ temos:

$$\begin{aligned} i_3 - CR\frac{di_2}{dt} &= 0 \\ i_1 - i_2 - CR\frac{di_2}{dt} &= 0 \\ CR\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0 \end{aligned}$$

Considere $E(t) = 0$ e obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} Li_1' + i_2R = 0 \\ CRi_2' + i_2 - i_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1' = -\dfrac{R}{L}i_2 \\ i_2' = \dfrac{1}{CR}i_1 - \dfrac{1}{CR}i_2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R}{L} \\ \frac{1}{CR} & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Considere $R = 3\Omega$ *e* $L = 1H$, *Daí*

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

ou ainda $i' = Ai$, *onde* $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Calculando os autovetores e autovalores obtemos os seguintes resultados.

Encontramos o autovalor $\lambda_1 = -1$ *e o autovetor associado* $v^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

tendo assim,

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Encontramos Também o autovalor $\lambda_2 = \dfrac{2}{3}$ *e o autovetor associado* $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tendo assim,

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{2}{3}t}$$

como a solução geral é dada por $x(t) = c_1 x^{(1)} + c_2 x(2)$, *portanto a solução do sistema diferencial é dada*

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{2}{3}t}$$

Conclusão

Este trabalho me proporcionou a oportunidade de aplicar diversos conhecimentos obtidos no curso de Matemática, principalmente os conceitos aprendidos em Álgebra Linear e do Cálculo. Além disso, deu oportunidade de ampliar o conhecimento em $E.D.O$ em particular Sistemas de equações Diferenciais. Podemos ressaltar o método dos Autovalores e Autovetores para resolução de Sistemas de Equações diferenciais, tanto com Autovalores e Autovetores complexos quanto a Autovalores com multiplicidade algébrica $1 \leq m$.

Vimos também que é possível transformar um Sistema de Equações Diferenciais de ordem $n > 1$ em um Sistema de Equações Diferenciais de Primeira Ordem equivalente, tornando algumas das suas técnicas de resolução semelhante a das técnicas da resolução de uma Equação diferencial.

Nesse trabalho vimos o método da diagonalização e o método da variação dos parâmetros para resolução dos Sistemas de equações Diferenciais de primeira ordem não homogêneo. Embora o método da variação dos parâmetros em geral, sem restrições, em muitos casos os cálculos podem ser tornarem árduos e o método se tornar pouco eficiente e assim tornando necessário a utilização de um software Matemático.

Em problemas reais muitas vezes obtemos um Sistema de Equação Diferencial, assim o conteúdo estudado neste trabalho tem uma grande importância em áreas como física, química e engenharia entre outras.

Referências

[1] BOLDRINI, José Luiz; FIGUEIREDO, Vera Lucia; WETZLER, Henry G.; **Álgebra linear**: São Paulo, Editora Harbra.

[2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.; **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de valores de contorno**; Rio de Janeiro, Editora LTC, 2010

[3] LAGES, Elon; **Álgebra Linear**: Rio de Janeiro, IMPA, 2009

[4] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio Freiria; **Equações Diferenciais Aplicadas**: Rio de Janeiro, IMPA, 2009

[5] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo; **Álgebra Linear**: São Paulo, Editora McGrew-Hill, 1987

[6] Zill,Dennis G.; **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem**: São Paulo, Editora thomson Learning,2003.

[7] http://pt.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Euler; Acesso: 26/02/2013.